**Лекция 18.**

Структуры и пространства

*Группы, кольца и поля:*

Бинарная алгебраическая операция (знак композиции на множестве) – отображение . Пишется так: (а не).

Сумма и произведение соответственно:

Алгебраическая система (структура) – пара .

Ассоциативность \* - . При наличии ассоциативности алгебраическую систему называют полугруппой.

Единичный (нейтральный) элемент относительно \* -

Моноид – полугруппа с единицей.

Обратимый элемент – элемент *a*, для которого . Элемент *b* записывают .

Группа – моноид, где все элементы обратимы.

Коммутативность -

Абелева группа – группа с коммутативным законом.

Нейтральный элемент для + обозначают 0.

Противоположный элемент для *a* – такой *b*, что .

Подгруппа группы *G* – группа, где – единица; , то .

Группы преобразований: пусть – множество всех биективных отображений из в . На этом множестве в качестве закона композиции задают суперпозицию отображений. с таким законом композиции – группа, единицей которой является тождественное отображение (элемент отображается сам в себя).

Кольцо – тройка элементов со свойствами: – абелева группа; – полугруппа; . Группа – аддитивная группа кольца, а полугруппа – мультипликативная полугруппа.

Пусть Если и являются соответственно подгруппой аддитивной группы и подполугруппой мультипликативной полугруппы кольца , то – подкольцо этого кольца. Нейтральные элементы аддитивной группы кольца и его мультипликативной полугруппы принято обозначать символами Ø и 1. Обратимый элемент кольца с единицей – элемент, у которого существует обратный и для которого истинны равенства

Коммутативное кольцо – кольцо, на котором выполняется: .

Поле – коммутативное кольцо, на котом выполняется неравенство и каждый не равный элемент обратим, то это кольцо называют полем, а группа – мультипликативная группа поля *.* Скаляры – элементы поля. Подполе поля – подкольцо в , которое само является полем, и в этом случае поле – расширением своего подполя .

*Векторные пространства:*

– поле с операциями сложения и умножения, а Ø и 1 – его единица и ноль. Непустое множество – наделено структурой векторного пространства над полем , если заданы функции и (сложение векторов и умножение вектора на скаляр) и выполнены условия: – абелева группа; при любых при любых – истинны следующие равенства:

Пусть – векторные пространства над полем . Гомоморфизм - функция этих пространств если: , при любых Изоморфизм – взаимно-однозначный гомоморфизм. Гомоморфные пространства – такие, между которыми существует гомоморфизм. Векторное пространство определяется с точностью до изоморфизма, или, другими словами, векторное пространство – класс изоморфных пространств.

Элементы векторного пространства называют векторами или точками.

Подпространство векторного пространства – множество, которое является пространством относительно тех же операций сложения векторов и умножения векторов на скаляры.

Линейное множество (многообразие) векторного пространства – непустое подмножество векторного пространства с выполненными условиями из следует .

Линейное многообразие в векторном пространстве является его подпространством, и, с другой стороны, любое подпространство векторного пространства является в нем линейным многообразием. Пересечение любого множества линейных многообразий в векторном пространстве является линейным многообразием этого пространства, то есть его подпространством.

– векторные пространства над полем . Произведение множеств можно наделить структурой векторного пространства над полем если при любых и любом определить сумму векторов и произведение вектора на скаляр как , Определённое векторное пространство - произведение векторных пространств . Если , то произведения векторных пространств обозначают

Алгебраическая сумма подмножеств векторного пространства – множество . Функция, сопоставляющая двум подмножествам векторного пространства их алгебраическую сумму, является ассоциативной, что позволяет ввести сумму *k* подмножеств векторного пространства: . Алгебраической суммой линейных многообразий векторного пространства является линейное многообразием в этом пространстве. Прямая сумма векторных пространств – векторное пространство =, где – линейные многообразия в . Если и если условия выполняются только при . Векторное пространство является прямой суммой своих линейных многообразий тогда и только тогда, когда любой вектор *x ∈ V* единственным образом представим в виде суммы , где

Класс смежности по линейному многообразию – множество , где – вектор и линейное многообразие векторного пространства над полем . Любые два класса смежности , либо совпадают, либо их пересечение – пустое множество. Множество можно наделить структурой векторного пространства над тем же полем, если при любых и любом определить сумму векторов и и произведение вектора на скаляр формулами Таким образом определенное векторное пространство – фактор-пространство векторного пространства по линейному многообразию .

Линейная комбинация векторов – вектор с коэффициентами

Линейная оболочка, натянутая на (непустое подмножество векторного пространства *V*) – множество всех линейных комбинаций векторов из с коэффициентами из.

Линейная оболочка является пересечением всех линейных многообразий в, содержащих .

Множество векторов – линейно независимо если не выполняется ни при каких коэффициентах , кроме . Иначе, набор векторов – линейно зависимый.

Размерность *dim V* векторного пространства– максимального число его линейно независимых векторов. Если размерность – конечна, то пространство – конечномерное. Иначе – бесконечномерное.

Если - линейные многообразия векторного пространства, то

Коразмерность (*дефектом* линейного многообразия *T* относительно векторного пространства *V*) – размерность векторного пространства : . Так же верно равенство (), что справедливо и для разбиения из *n* линейных многообразий.

Линейно независимое множество *X* векторного пространства *V* называется алгебраическим базисом этого пространства, если

Любой вектор векторного пространства V может быть представлен в виде линейной комбинации элементов его базиса, причем это представление единственно для каждого базиса.

В *n-*мерномвекторном пространствебазис состоит ровно из *n* векторов.

В векторном пространстве может существовать несколько базисов, которые связаны матрицей перехода (невырожденной).

Множество всех базисов векторного пространства можно представить объединение двух непересекающихся множеств и :

* любые два базиса из связаны матрицей с положительным определителем и любые два базиса из также связаны матрицей с положительным определителем
* любой базис из связан с любым базисом из матрицей с отрицательным определителем
* такое представление единственно с точностью до перестановки с

Если произведено такое разбиение, то на векторном пространстве задана ориентация. Базисы - положительно определённые (правые), а - отрицательно ориентированными (левыми).

Отрезок, соединяющий точки – множество , где - вещественное или комплексное векторное пространство.

Выпуклое множество – множество , где если из , то.

Выпуклая комбинация векторов с коэффициентами , – вектор .

Множество всех выпуклых комбинаций векторов из называют выпуклой оболочкой, натянутой на . Выпуклая оболочка - является пересечением всех выпуклых множеств в , содержащих .